



UNIDAD EDUCATIVA MONTE TABOR – NAZARET
Área de Matemáticas
BANCO DE PROBLEMAS PREPARATORIOS
PARA EXAMEN I QUIMESTRE
2015 – 2016

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones por los tres métodos y realice un bosquejo de la solución.

a. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Nota: los siguientes ejercicios son extras para practicar y ganar destreza en la aplicación de los tres métodos para encontrar la solución o intersección de un sistema de ecuaciones lineales con 2 variables.

a. $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 5y = 10 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 0,3x + 0,2y = 0,1 \\ 1,2x - 2,4y = 3,6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$

MODELADO LINEAL

1. 1 kg (kilogramo) es equivalente a 2.2 Lb (libras).
 - a) Convierta 50 kg en Lb.
 - b) Elabore un gráfico de conversión de libras a kilogramos. Use valores en el eje x desde 0 kg hasta 100 kg, y en el eje y de 0 libras hasta 250 libras.
 - c) Encuentre la ecuación que relaciona a los kilogramos con las libras.
2. En un experimento de Química, un líquido es calentado mientras se registra la temperatura en diferentes instantes. Se muestra la tabla de resultados.

Time (x minutes)	3	5	7	9
Temperature (y °C)	130	210	290	410

- Haga un gráfico de los datos mostrados.
 - ¿Cuál fue la temperatura inicial del líquido?
 - Encuentre la ecuación de la recta que representa al fenómeno.
- Los honorarios de un plomero son 90 AUD (dólares australianos) por cada hora de trabajo, más un costo fijo por posibles cancelaciones de contrato. El cargo total se representa por la ecuación $C = 60 + 90t$, donde t está en horas.
 - Escriba el costo fijo impuesto por el plomero.
 - Le toma 3.5 horas completar un cierto trabajo. Calcule el valor que le adeudan al plomero una vez terminado el trabajo.
 - Si el plomero recibe 510 AUD, calcule el tiempo que le tomó completar el trabajo
 - El departamento de Matemáticas de un colegio tiene un presupuesto de \$ 1440 para comprar libros de texto. El libro “Matemáticas para todos, volumen 1” tiene un costo de \$ 70, mientras que el libro “Matemáticas para todos, volumen 2” tiene un costo de \$ 40. Si el departamento necesita el doble de textos del volumen 1 que del volumen 2, encuentre cuántos libros comprará el departamento de Matemáticas en total. [4 puntos]
 - Un carpintero elabora sillas y mesas de madera. Le toma 10 horas para elaborar una mesa y 4 horas para elaborar una silla. Gasta \$ 40 en materiales para elaborar cada silla, y \$ 120 para elaborar cada mesa. Si en un contrato el carpintero gasta \$ 760, y le toma terminar el trabajo 70 horas, encuentre el número de sillas y el número de mesas que elaboró. [4 puntos]

ECUACIONES CUADRÁTICAS (FÓRMULA GENERAL)

- Use la fórmula cuadrática para resolver exactamente para x :

a. $x^2 - 4x - 3 = 0$.	d. $x^2 + 4x = 1$.	g. $(3x + 1)^2 = -2x$
b. $x^2 + 6x + 7 = 0$.	e. $x^2 - 4x + 2 = 0$.	h. $(x + 3)(2x + 1) = 9$
c. $x^2 + 1 = 4x$.	f. $2x^2 - 2x - 3 = 0$.	
- Ordene las siguientes ecuaciones de manera que se expresen en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, luego use la fórmula para resolver exactamente la ecuación para x .

a. $(x + 2)(x - 1) = 2 - 3x$	e. $x - \frac{1}{x} = 1$
b. $(2x + 1)^2 = 3 - x$	
c. $(x - 2)^2 = 1 + x$	f. $2x - \frac{1}{x} = 3$
d. $\frac{x - 1}{2 - x} = 2x + 1$	

ECUACIONES CUADRÁTICAS (FACTORIZACIÓN)

1. (a) Factorice la expresión $2x^2 - 3x - 5$.

(b) De lo anterior, resuelva la ecuación $2x^2 - 3x = 5$.

(Total 4 puntos)

2. (a) Encuentre la solución de la ecuación $x^2 - 5x - 24 = 0$.

(b) La ecuación $ax^2 - 9x - 30 = 0$ tiene solución $x = 5$ y $x = -2$. Encuentre el valor de a .

(Total 8 puntos)

3. (a) Resuelva la siguiente ecuación para x

$$3(2x + 1) - 2(3 - x) = 13.$$

(2)

(b) Factorice la expresión $x^2 + 2x - 3$.

(2)

(c) Encuentre las soluciones **positivas** de la ecuación

$$x^2 + 2x - 6 = 0.$$

(2)

(Total 6 puntos)

4. Sea $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

(a) Factorice $x^2 - 6x + 8$.

(2)

(b) De lo anterior, resuelva la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

(2)

(Total 4 puntos)

5. (a) Factorice la expresión $x^2 - 25$.

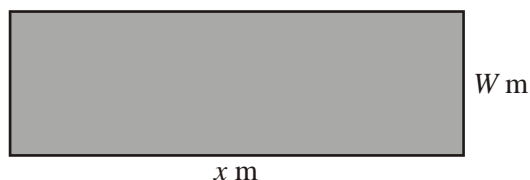
(b) Factorice la expresión $x^2 - 3x - 4$.

(c) Usando su respuesta de la parte (b), resuelva la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$.

(Total 8 puntos)

PROBLEMAS QUE DAN LUGAR A ECUACIONES CUADRÁTICAS

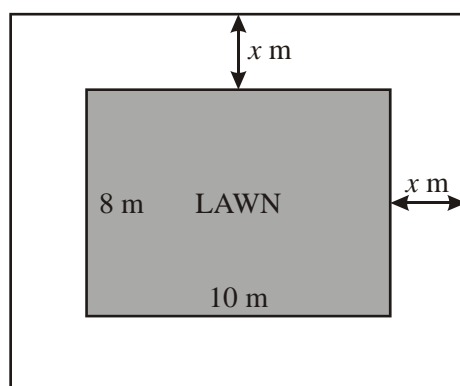
6. El perímetro del campo rectangular mostrado es 220 m. Uno de los lados mostrados mide x .



- (a) Exprese el ancho (W) en términos de x .
- (b) Escriba una expresión, en términos de x solamente, para el área del campo.
- (c) Si la longitud x es 70, encuentre el área.

(Total 4 puntos)

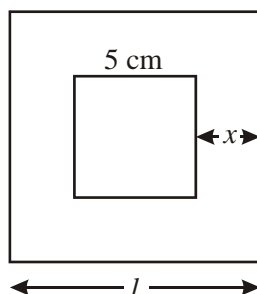
7. El diagrama de abajo muestra un camino de $x \text{ m}$ de ancho, alrededor de un césped rectangular, el cual mide 10m por 8 m.



- (a) Escriba una expresión, en términos de x , para el área del camino.
- (b) Calcule el ancho del camino si el área es de 208 m^2 .

(Total 4 puntos)

8. Una foto tiene la forma de un cuadrado de lado 5 cm. Es rodeado por un marco de madera de ancho $x \text{ cm}$, como se muestra en la figura de abajo.



La longitud del marco de madera es l cm, y el área del marco de madera es A cm².

(a) Escriba una expresión para la longitud l en términos de x . (1)

(b) Escriba una expresión para el área A en términos de x . (2)

(c) Si el área del marco es 24 cm², encuentre el valor de x . (4)

(Total 7 puntos)

9. La sra. Harvey desea poner una cerca de 50 m de largo, alrededor de su jardín rectangular. Ella necesita cercar solamente 3 lados porque el otro lado está junto a su casa.

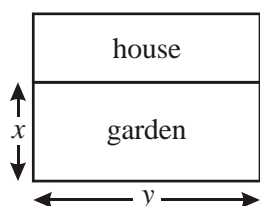


Diagram not to scale

El ancho del jardín es representado por x , y la longitud por y .

(a) Escriba una expresión para y en términos de x .

(b) Escriba una expresión para el área, A , del jardín en términos de x .

(c) Si el área es 200 m², encuentre las dimensiones del jardín.

(Total 8 puntos)

10. Una piscina se construye en forma de L. La forma se genera a partir de dos cuadrados con lados de longitudes x y \sqrt{x} como se muestra.

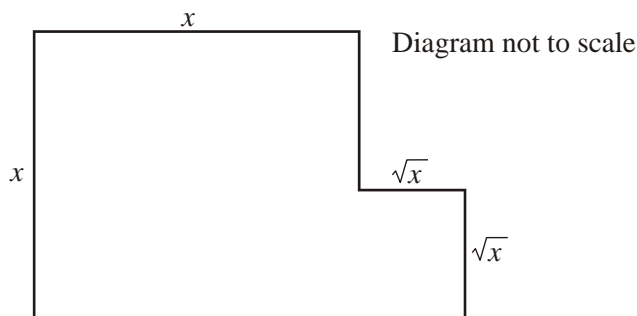


Diagram not to scale

(a) Escriba una expresión para el área A de la superficie que abarca la piscina.

(b) Si el área debe tener 30 m², escriba una ecuación cuadrática que exprese esta información.

- (c) Encuentre las dos soluciones de su ecuación obtenida en la parte (b).
- (d) Indique cuál de las dos respuestas obtenidas en la parte (c) es la correcta para x . Justifique brevemente su elección

(Total 8 marks)

11. En el diagrama, $\hat{BAC} = 90^\circ$. La longitud de los tres lados son x cm, $(x + 7)$ cm y $(x + 8)$ cm.

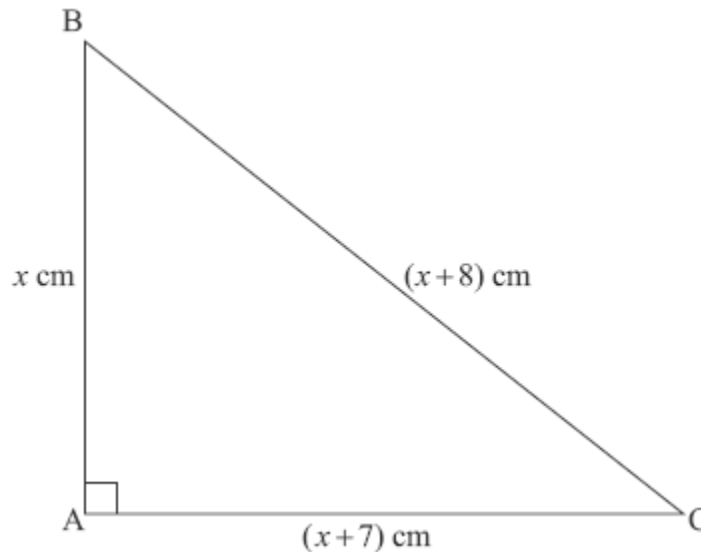


diagram not to scale

- (a) Escriba y simplifique una ecuación cuadrática que relacione los tres lados del triángulo.

(3)

- (b) Resuelva la ecuación cuadrática obtenida en la parte (a).

(2)

- (c) Escriba el valor del perímetro del triángulo.

(1)

(Total 6 marks)

12. La longitud de un jardín cuadrado es $(x + 1)$ m. En una de las esquinas un cuadrado de 1 m de longitud es utilizado solamente para pasto. El resto del jardín se usa solamente para plantar rosas, y está representado por la región sombreada en la figura mostrada.

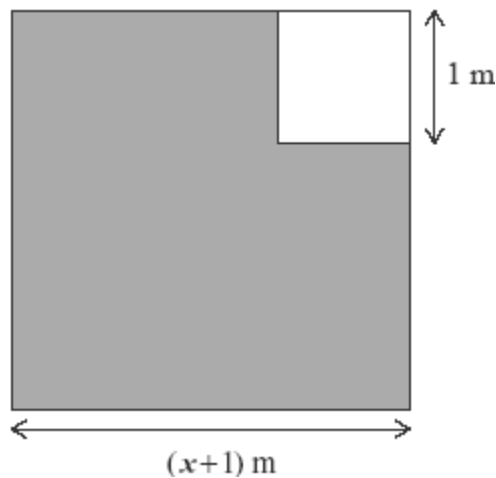


diagram not to scale

El área de la región sombreada es A .

- (a) Escriba una expresión para el área A en términos de x . (1)
 - (b) Encuentre el valor de x dado que $A = 109.25 \text{ m}^2$. (3)
 - (c) El dueño del jardín pone una cerca alrededor de la región sombreada, encuentre la longitud de esta cerca. (2)
- (Total 6 puntos)

13. La longitud de uno de los lados de un rectángulo es 2 cm más largo que su ancho.

- (a) Si el lado pequeño es x cm, encuentre el perímetro del rectángulo en términos de x .

El perímetro de un cuadrado es igual al perímetro del rectángulo hallado en la parte (a).

- (b) Determine la longitud de cada lado del cuadrado en términos de x .

La suma de las áreas del rectángulo y del cuadrado es $2x^2 + 4x + 1 \text{ (cm}^2\text{)}$.

- (c)
 - (i) Dado que esta suma es 49 cm^2 , encuentre x .
 - (ii) Encuentre el área del cuadrado.

(Total 6 marks)

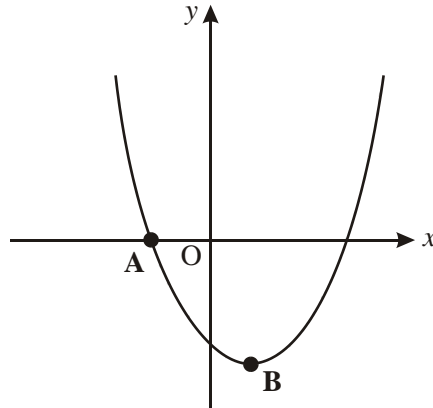
GRÁFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

14. (a) Resuelva la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(b) Encuentre las coordenadas de los puntos donde la gráfica de $y = x^2 - 5x + 6$ intersecta el eje x .

(Total 4 puntos)

15. El diagrama muestra la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$. El gráfico cruza al eje x en el punto A, y tiene vértice B.



(a) Factorice $x^2 - 2x - 8$.

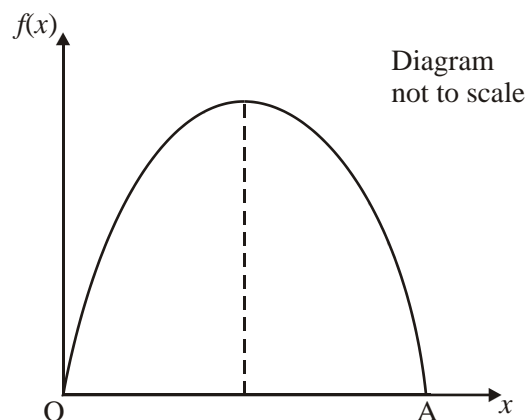
(b) Escriba las coordenadas de cada uno de estos puntos

(i) A;

(ii) B.

(Total 4 puntos)

16. El gráfico de la función $f(x) = 30x - 5x^2$ se muestra en la figura de abajo



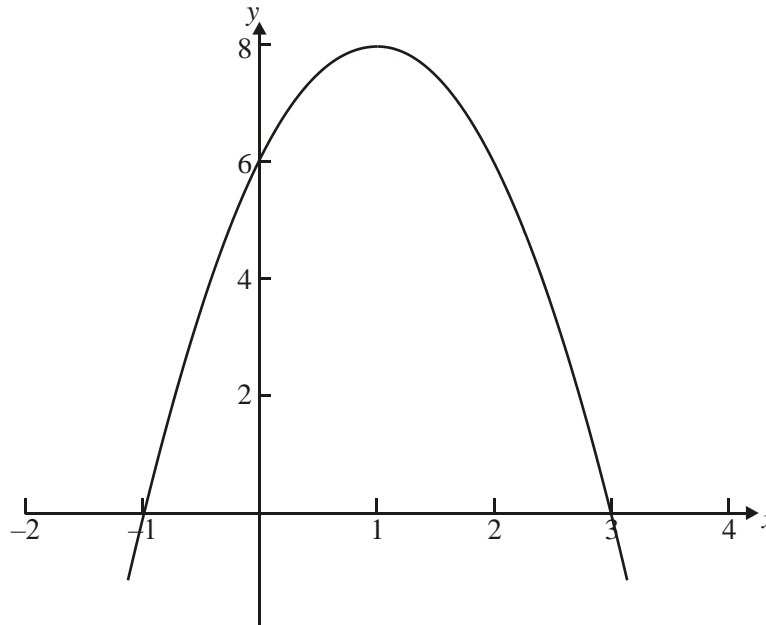
(a) Factorice completamente $30x - 5x^2$.

(b) Encuentre las coordenadas del punto A.

- (c) Escriba la ecuación del eje de simetría.

(Total 8 puntos)

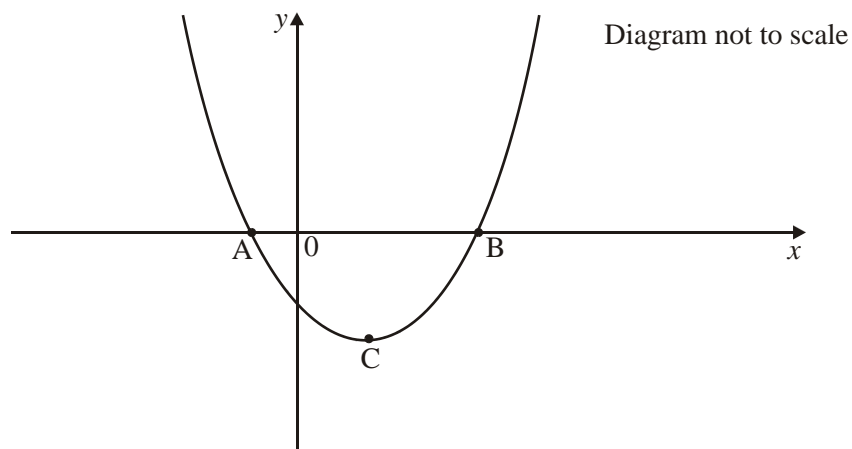
17. La figura muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + 4x + c$.



- (a) Escriba el valor de c .
- (b) Encuentre el valor de a .
- (c) Escriba la función cuadrática en su forma factorizada.

(Total 8 puntos)

18. El gráfico de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se muestra en el diagrama siguiente.

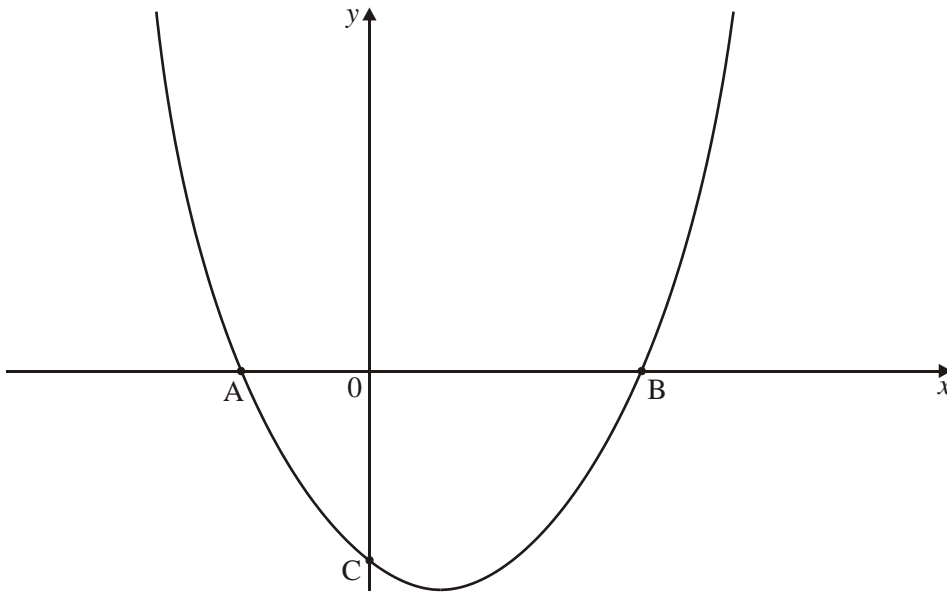


- (a) Factorice la expresión $x^2 - 2x - 3$.

- (b) Escriba las coordenadas de los puntos A y B.
- (c) Escriba la ecuación del eje de simetría.
- (d) Escriba las coordenadas del vértice de la parábola, C.

(Total 8 puntos)

19. El gráfico de la función $y = x^2 - x - 2$ se dibuja abajo.



- (a) Escriba las coordenadas del punto C.
- (b) Calcule las coordenadas de los puntos A y B.

(Total 8 marks)

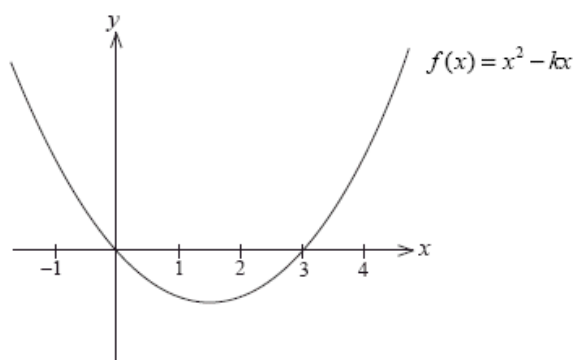
20. (a) Factorice la expresión $x^2 - kx$.

(1)

- (b) Resuelva la ecuación $x^2 - kx = 0$.

(1)

El diagrama de abajo muestra el gráfico de la función $f(x) = x^2 - kx$ para un valor particular de k .



- (c) Escriba el valor de k para esta función.

(1)

- (d) Encuentre el valor mínimo de la función $y = f(x)$.

(3)

(Total 6 marks)

21. (a) Factorice $3x^2 + 13x - 10$.

(2)

- (b) Resuelva la ecuación $3x^2 + 13x - 10 = 0$.

(2)

Considere una función $f(x) = 3x^2 + 13x - 10$.

- (c) Encuentre la ecuación del eje de simetría.

(2)

- (d) calcule el valor mínimo de esta función.

(2)

(Total 8 marks)

MODELOS CUADRÁTICOS

22. Una pequeña compañía manufacturera elabora y vende x máquinas cada mes. El costo mensual C , en dólares, de elaborar x máquinas está dado por

$$C(x) = 2600 + 0.4x^2.$$

Los ingresos mensuales I , en dólares, obtenidos por la venta de x máquinas están dados por

$$I(x) = 150x - 0.6x^2.$$

- (a) Muestre que los beneficios de la compañía pueden calcularse usando la ecuación cuadrática

$$P(x) = -x^2 + 150x - 2600.$$

(2)

- (b) Los beneficios máximos ocurren en el vértice de la función $P(x)$. Determine cuántas máquinas se deberían vender cada mes para obtener una utilidad máxima (2)
- (c) Si la compañía maximiza las utilidades, encuentre el precio de venta de cada máquina (4)
- (d) Dado que $P(x) = (x - 20)(130 - x)$, encuentre el mínimo número de máquinas que la compañía debe elaborar y vender cada mes de manera que se tengan utilidades positivas. (4)
- (Total 12 puntos)**

23. La función $Q(t) = 0.003t^2 - 0.625t + 25$ representa la cantidad de energía en una batería, luego de t minutos de uso.

- (a) Establezca la cantidad de energía almacenada por la batería antes de ser utilizada.
- (b) Calcule la cantidad de energía disponible después de 20 minutos.
- (c) Calcule el número de minutos que toma para alcanzar una energía de cero.

(Total 6 marks)

IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Considere la función $f(x) = 4\sin x - \cos^2 x - 71$
 - a) Reemplace la expresión $\cos^2 x$ con su identidad equivalente, o sea, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, y luego reduzca los términos semejantes. (1)
 - b) Una vez reducidos los términos semejantes y ordenada la expresión de manera decreciente (de mayor a menor exponente), la función $f(x)$ se puede expresar en la forma $a \sin^2 x + b \sin x + c$, encuentre a , b y c . (2)
 - c) $f(x)$ se puede dejar como el producto de dos factores (factorización del trinomio) de la forma $(\cos x + p)(\cos x + q)$, encuentre p y q . (2)
2.
 - a) Factorice la expresión $\cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta$, luego a esta expresión factorizada redúzcala por medio de identidades trigonométricas. [3]
 - b) Eleve al cuadrado cada binomio siguiente $(\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2$, reduzca términos semejantes, y reduzca la expresión usando identidades trigonométricas [4]
3. Para la expresión $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$, desarrolle el siguiente proceso
 - a) Realice la suma algebraica. [2]
 - b) Use identidades trigonométricas y reduzca el numerador. [2]

c) Simplifique y demuestre que el resultado final es $\frac{2}{\sin \theta}$.

[1]

4. Para la expresión $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}$ realice el siguiente proceso

a) Factorice el numerador [1]

b) En el denominador use la identidad pitagórica y posteriormente factorice. [2]

c) Simplifique y demuestre que el resultado final es $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$. [1]

5. Desarrolle la expresión $-2\cos^2 x - 3\sin x$ de acuerdo a las instrucciones siguientes

a) Reemplace la función $\cos^2 x$ con su respectiva identidad pitagórica que contiene a la función $\sin x$. [1]

b) La expresión formada en el literal anterior, luego de ser desarrollada, puede ser expresada de la manera $a\sin^2 x + b\sin x + c$, encuentre "a", "b" y "c". [2]

c) La expresión obtenida en el literal anterior, puede ser expresada también, de manera factorizada $(p\sin x + q)(r\sin x + t)$, encuentre, p, q, r y t. [3]

d) Resuelva la ecuación $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ para el intervalo $[0, 2\pi]$. [3]

6. Sabiendo que $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

a) Encuentre los dos valores para $\sin x$. [4]

b) Dado que $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, y que una solución para x es 30° , encuentre los otros posibles valores de x . En esta pregunta debe justificar la manera de obtener los resultados. [2]

7. Considere la ecuación trigonométrica $-3 \sin x - 3 - \sin^2 x = 3\cos^2 x - 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

(a) Escriba esta ecuación en la forma $f(x) = 0$, donde $f(x) = a \sin^2 x + b \cos x + c$. Use las identidades trigonométricas pitagórica para ello. [2]

(b) Factorice $f(x)$. Si no se puede justifique por qué no se puede. [3]

(c) Encuentre el conjunto solución de la ecuación formada anteriormente ($f(x) = 0$). [3]

8. Considere $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$.

Resuelva la ecuación $\cos\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$, para $0 \leq x \leq 2\pi$. Haga un bosquejo de la gráfica y muestre las soluciones.

[2]

9. Indique en qué cuadrante pueden estar las soluciones de las siguientes ecuaciones. No es necesario que dé el ángulo como respuesta

- a) $\text{Sen } x = -0.23$. [1]
 b) $\text{Cos } x = -2.57$ [1]
 c) $\text{Sen } x = 0.50$ [1]
 d) $\text{Tan } x = -2.25$ [1]

10. Encuentre las soluciones exactas de las ecuaciones, entre 0° y 360° . (No puede usar calculadora)

- a) $\sqrt{2} \text{ Sen } x = -1$ [2]
 b) $2\text{Sen}x = -\sqrt{3}$ [2]
 c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [2]

11. Complete la siguiente tabla. [5 puntos]

Radianes	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{45}$	$\frac{3\pi}{5}$				$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{6}$		
Grados				75°	180°	210°			165°	200°

12. Encuentre el valor exacto de la siguiente expresión (No puede usar calculadora)

- a. $2[\text{Cos}(120^\circ)] - 4(\text{Sen}150^\circ)^2 + \text{Tan } 315^\circ$. [6 puntos]
 b. $(\text{Cos}240^\circ - \text{Sen}120^\circ) \div (\text{Tan } 120^\circ + \text{Tan } 240^\circ)$. [6 puntos]